

基于微分超拉普拉斯块约束的改进弹性阻抗反演方法

侯斯允^{1,2}, 李景叶^{1,2*}, 耿伟恒³, 韩磊^{1,2}, 王永平^{1,2}

1 中国石油大学(北京)油气资源与工程全国重点实验室, 北京 102249

2 中国石油大学(北京)地球物理学院, 北京 102249

3 清华大学自动化系, 北京 100084

* 通信作者, lijingye@cup.edu.cn

收稿日期: 2024-05-20; 修回日期: 2024-07-08

中国石油天然气集团有限公司项目“物探应用基础实验和前沿理论方法研究”(编号: 2022DQ0604-04)资助

摘要 岩石物理模型的引入, 使得我们可以充分利用叠前地震资料进行反演从而得到更加全面的地下介质信息。然而以反射系数方程为基础的弹性阻抗方程中包含的需要反演的参数的增多, 不同参数对反射系数贡献量的不同等问题也增加了反演的难度。因此, 为了保证多参数反演的稳定性, 两步法反演得到了广泛的应用。即首先进行弹性阻抗反演以得到不同入射角、方位角下的弹性阻抗信息, 随后以弹性阻抗作为输入进行下一步的多参数反演。弹性阻抗作为波阻抗反演技术的拓展已经十分成熟, 但仍然存在解的非唯一性、分辨率不足和稀疏性较差等问题。为此, 本文将信号与图像处理领域中被广泛应用的超拉普拉斯约束引入到反演过程当中。该方法能够避免0范数求导问题, 同时能够根据数据本身特征选取最优 p 值, 使反演结果获得较高分辨率的同时保证一定的稳定性。并且引入线性化反射系数公式, 以求直接通过地震数据反演得到弹性阻抗的反演结果。首先, 对线性化弹性阻抗近似公式进行推导并分析其精度。随后, 基于贝叶斯反演理论框架, 推导了引入微分超拉普拉斯块约束后的弹性阻抗反演目标函数, 并选用迭代重加权最小二乘法求解目标函数来获得弹性阻抗反演结果。最后, 将新方法结果与传统方法获得的结果进行比较, 进而验证方法的准确性以及稳定性。相关系数以及弹性阻抗曲线的对比均有效地证明了所提出方法的反演结果优于传统 L_1 范数和 L_2 范数约束的反演结果。将新方法应用于合成数据以及实际数据的反演当中, 证明了其有效性和可行性, 可以广泛应用于弹性阻抗的反演流程当中, 为后续多参数的反演提供了更加可靠全面的信息。

关键词 弹性阻抗; 叠前反演; 微分超拉普拉斯; 贝叶斯框架; 分辨率

中图分类号: P631; P613.18

A modified inversion method for elastic impedance based on the differentiable hyper-Laplacian blocky constraint

HOU Siyun^{1,2}, LI Jingye^{1,2}, GENG Weiheng³, HAN Lei^{1,2}, WANG Yongping^{1,2}

1 State Key Laboratory of Petroleum Resources and Engineering, China University of Petroleum-Beijing, Beijing 102249, China

2 College of Geophysics, China University of Petroleum-Beijing, Beijing 102249, China

3 Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China

引用格式: 侯斯允, 李景叶, 耿伟恒, 韩磊, 王永平. 基于微分超拉普拉斯块约束的改进弹性阻抗反演方法. 石油科学通报, 2024, 04: 549-562
HOU Siyun, LI Jingye, GENG Weiheng, HAN Lei, WANG Yongping. A modified inversion method for elastic impedance based on the differentiable hyper-Laplacian blocky constraint. Petroleum Science Bulletin, 2024, 04: 549-562. doi: 10.3969/j.issn.2096-1693.2024.04.041

Received: 2024-05-20; Revised: 2024-07-08

Abstract The introduction of rock physics models allows us to fully utilize pre-stack seismic data for inversion, thereby obtaining more comprehensive information about the subsurface media. However, the increase in the number of parameters to be inverted in the elastic impedance equation, which is based on the reflection coefficient equation, as well as the varying contributions of different parameters to the reflection coefficient, have also increased the difficulty of the inversion. Consequently, to ensure the stability of multi-parameter inversion, the two-step inversion method has been widely applied. That is, firstly, perform elastic impedance inversion to obtain elastic impedance information under different incident angles and azimuthal angles, and then use elastic impedance as input for the next step of multi-parameter inversion. Elastic impedance, as an extension of acoustic impedance inversion technology, has become very mature, but there are still problems such as non-uniqueness of solutions, insufficient resolution, and insufficient sparsity of the solution. This article introduces the hyper-Laplacian blocky constraint into the inversion process. This is commonly used in the field of signal and image processing. It can avoid the issue of 0-norm differentiation and also allow for the selection of the optimal p-value according to the characteristics of the data itself, ensuring a certain degree of stability while obtaining higher resolution in the inversion results. At the same time, a linearized approximate PP wave reflection coefficient equation is introduced to obtain the inversion results of elastic impedance directly from the seismic data. First, the derivation of a linearized elastic impedance approximation equation is carried out, and its accuracy is analyzed. Subsequently, based on the Bayesian theory, the objective function of elastic impedance inversion with the introduction of the differentiable hyper-Laplacian blocky constraint is derived. The iterative reweighted least squares method is chosen to solve the objective function to obtain the elastic impedance inversion results. Finally, the results of the new method are compared with those obtained by traditional methods to verify the accuracy and stability of the method. Both the correlation coefficient and the comparison of elastic impedance curves effectively demonstrate that the inversion results obtained by the proposed method are better than those of the traditional inversion results constrained by L_1 norm and L_2 norm. By applying the new method to the inversion of both synthetic data and real data, its effectiveness and feasibility have been proved. Therefore it can be widely applied in the inversion process of elastic impedance, providing more reliable and comprehensive information for subsequent multi-parameter inversion.

Keywords elastic impedance; pre-stack inversion; differentiable hyper-Laplacian blocky constraint; Bayesian-based inversion framework; resolution

doi: 10.3969/j.issn.2096-1693.2024.04.041

0 引言

叠后波阻抗反演基于地震波自激自收假设,但叠后地震数据是叠前道集叠加平均后的结果,提高信噪比的同时使得部分有效信息同时被压制忽略^[1]。而将波阻抗随入射角、方位角等变化的弹性阻抗的引入能够包含更多有效信息,也为后续的多参数反演提供了更加有效全面的输入信息^[2-4],因此对于弹性阻抗的研究对地下介质参数的刻画有着十分重要的意义^[5-11]。

Connolly^[12]以Aki-Richards方程为基础,将反射振幅与入射角度联系在一起,提出了弹性阻抗(Elastic Impedance)的概念,用于模拟不同的地震振幅异常。Martins^[13]通过对任意对称各向异性介质的假设将地震各向异性引入到弹性阻抗当中,扩展了弹性阻抗的应用范围。Santos等^[14]通过斯奈尔定律将射线参数引入弹性阻抗方程当中,提高了弹性阻抗方程的精度。陈天胜^[15]提出了一种新的弹性阻抗近似公式,在Martins公式基础上,增强了基于各向异性参数的公式的精确度。宗兆云等^[16]将杨氏模量泊松比与弹性阻抗方程相联系,提出了基于贝叶斯理论的YPD反演算法。Chen

等^[17]根据逆质量因子建立了近似反射系数和衰减弹性阻抗(QEI),并通过两步法实现反演,对含气储层进行预测和评价。马妮等^[8]通过方位弹性阻抗估算了正交各向异性水平应力差异比,能有效指导油气的勘探与开发。Chen等^[7]通过推导,得到有效应力参数与弹性阻抗之间的关系,能有效指示流体并进行应力预测。可见,提高弹性阻抗反演精度与后续地下介质的预测有着密不可分的联系。

地震反演技术能够帮助我们有效提取地下介质的各种属性,它通过现有的地震、测井等资料预测未知的地下岩性物性等信息,指导油气勘探开发。而波阻抗反演是地震反演当中的重要组成部分,于1979年首次被Lindseth^[18]提出,近年来波阻抗反演技术愈发成熟^[19-21],但仍然存在反问题的不稳定性、边界刻画不清晰等问题^[22]。为了解决反问题的不稳定性,许多学者进行了一系列的研究^[23-26]。Claerbout等^[27]分析了不同范数在反问题的求解当中发挥的作用。Tikhonov等^[28]提出了求解不稳定性问题的完整方法。Buland等^[29]在地球物理反问题当中引用贝叶斯理论。此后,各种范数被提出用于解决问题的不稳定性。目前 L_0 范数

被认为是一种稀疏解，因为它要求计算非零数据的数量，因此最小化的 L_0 范数相当于最为稀疏的解。然而， L_0 范数^[30]是一种非定常多项式(nondeterministic polynomial)，对于它的求解是困难且耗时的。Zhang等^[31]在反演当中加入了凸函数—— L_1 范数，其求解相较于 L_0 范数更为简单，但其稀疏性相对较差^[32]。Keshavarzian等^[33]随后经过数据测试，验证了基于 L_p 范数正则化中 p 值的最合适范围为 $0 < p < 1$ ，因为在此范围内正则化项约等于 L_0 范数，相较于 $p \geq 1$ ，能够得到更为稀疏的解。除此之外， $L_{1/2}$ 范数和 L_{1-2} 范数^[26]也被广泛应用于贝叶斯框架当中用以提高反演结果的分辨率。Krishnan等^[34]提出了超拉普拉斯先验分布，其与 $p > 0$ 情况下的 L_p 范数相似，并将其应用于信号处理领域，并得到了一个更好的结果，其中 p 可以根据实际数据的情况进行选择以得到最合适值。然而在求解 $p=1$ 的最小化问题时，仍然难以获得最大后验超拉普拉斯分布。Theune等^[35]对拉普拉斯分布进行改进，并称之为微分超拉普拉斯分布，使其能够适用于所有 p 值，并且采用具有长尾项的块约束，通过在差异反演结果的垂直梯度上应用稀疏性从而描绘层间块状边界。

本文针对弹性阻抗反演当中存在的分辨率低，边界刻画不清晰等问题，首先分析了近似弹性阻抗线性方程的准确性及适用范围；随后将微分超拉普拉斯分布引入块约束当中的正则化项当中，推导了相应目标函数，对模型的反演测试当中采用重加权最小二乘法迭代求解，验证方法的有效性；最后，我们将方法应用于实际数据当中，最终结果表明所提出方法能够提高反演结果垂向梯度上的稀疏性，并且能够有效提高反演方法的分辨率，可以广泛应用于弹性阻抗的反演过程当中，为后续对地层更加精细的刻画提供全面准确的信息。

1 方法原理

1.1 线性弹性阻抗方程贝叶斯反演理论基础

Connolly(1990)以三项Aki-Richards线性近似方程为基础，将反射振幅与入射角联系在一起：

$$R_{pp}(\theta) = a \frac{\Delta V_p}{2V_p} + b \frac{\Delta V_s}{2V_s} + c \frac{\Delta \rho}{2\rho} \quad (1)$$

其中， $a = 1 + \tan^2 \theta$, $b = -8K \sin^2 \theta$, $c = 1 - 4K \sin^2 \theta$ 并且 $K = \left(\frac{V_s}{V_p}\right)^2$ 。而根据定义，以弹性阻抗表示的反射系数

为：

$$R_{pp}(\theta) = \frac{EI(\theta)_2 - EI(\theta)_1}{EI(\theta)_2 + EI(\theta)_1} \quad (2)$$

其中， R_{pp} 为PP波反射系数， $EI(\theta)_2$ 为分界面下层的介质的弹性阻抗， $EI(\theta)_1$ 为分界面上层的介质的弹性阻抗，如果地层连续变化，界面两侧介质的差异比较小，则有：

$$EI(\theta) \approx \frac{EI(\theta)_1 + EI(\theta)_2}{2} \quad (3)$$

$$\Delta EI(\theta) = EI(\theta)_2 - EI(\theta)_1 \quad (4)$$

将公式(3)以及公式(4)带入公式(2)，可以得到：

$$R_{pp}(\theta) \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta EI(\theta)}{EI(\theta)} \quad (5)$$

在上下层介质变化较为微小的情况下，利用微分方程的变换关系，可以得到^[36]：

$$R_{pp}(\theta) \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta EI(\theta)}{EI(\theta)} \approx \frac{1}{2} \Delta \ln[EI(\theta)] \quad (6)$$

由于式(6)成立的前提条件是界面两侧介质的变化较为微小，因此应当分析该公式的精确度以分析其适用范围。

由图1横坐标可知，当 EI_2/EI_1 的值处于0.5~2.1之间时，微分近似公式具有较高的准确性^[37]。同时，观察图1纵坐标，我们可以发现，当反射系数处于-0.4~0.4之间时，近似公式与精确公式之间几乎没有误差。因此，当地下介质连续变化且弹性性质差异较小时，该公式具有一定的适用性。

若选用常规迭代算法求解弹性阻抗的值时，需要利用道积分方法计算弹性阻抗信息。但这种方法存在

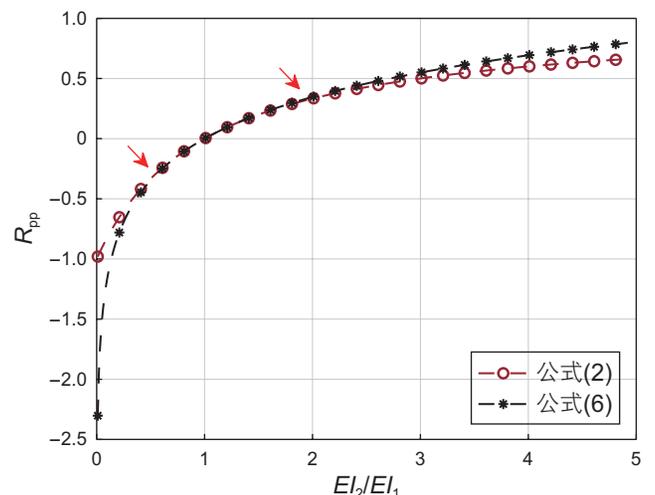


图1 精确反射系数公式与微分近似反射系数公式对比
Fig. 1 Comparison between exact reflection coefficient equation and differential approximation reflection coefficient equation

一定缺陷,首先是该方法对弹性阻抗的准确度要求较高,如果浅层信息不准确,将会导致整道弹性阻抗值与真实值产生较大偏差;其次,该方法在计算过程中会引入累积误差,导致深层弹性阻抗结果误差越来越大。因此,为了解决这一问题,我们通过公式(6)利用地震资料直接反演弹性阻抗,能够有效弥补道积分方法的缺陷。

为了更加全面的分析该公式的适用范围,以模拟井资料为基础,采用地震记录褶积模型进行正演,从而得到相应地震记录,进一步分析微分近似公式精确度:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\tau)r(t-\tau)d\tau + e(t) \quad (7)$$

其中, s 为地震记录, e 为随机噪音, ω 为地震子波, r 为反射系数, τ 为时移量,利用该式即可正演得到模拟地震记录。

公式(7)为地震记录褶积模型的连续表达式,然而实际运算当中,我们往往需要采用公式的离散表达式,即:

$$d = Gm + e \quad (8)$$

其中, d 表示地震记录, m 表示弹性阻抗, e 表示随机噪音, G 为正演算子。他们的表达形式如下:

$$G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_1 & & & & & \\ w_2 & w_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & w_{m_w} & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$d = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots \ d_n]^T \quad (10)$$

$$m = [\log(EI_1) \ \log(EI_2) \ \log(EI_3) \ \dots \ \log(EI_{n+1})]^T \quad (11)$$

上式中, n 代表采样点个数, n_w 表示子波长度。

图2即以模拟井数据为基础,选用不同公式计算得到反射系数,并利用地震记录褶积模型得到地震记录同时选取两种地震记录做差得到残差。其中图2a~c分别是入射角为 8° , 16° , 24° 下的不同公式计算得到的反射系数,图2d以及图2e分别为不同公式利用褶积模型得到的无噪地震记录,图2f为两种公式得到的模拟地震记录之间的差,从图中可以观察到,两者之

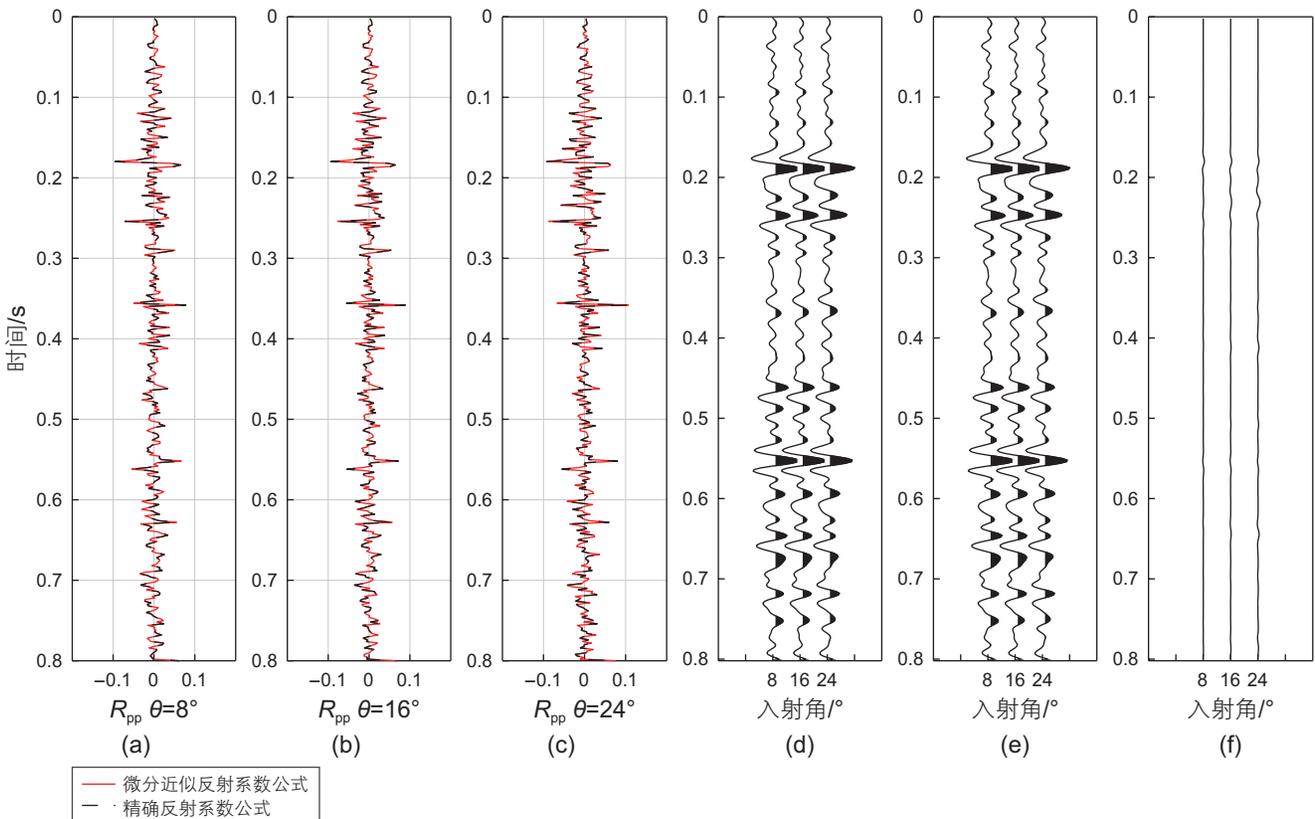


图2 精确反射系数公式与微分近似反射系数公式的正演结果。(a) $\theta = 8^\circ$ 下的反射系数; (b) $\theta = 16^\circ$ 下的反射系数; (c) $\theta = 24^\circ$ 下的反射系数; (d) 基于精确反射系数公式的正演地震记录; (e) 基于线性近似公式的正演地震记录; (f) 两种地震记录之间的差
Fig. 2 The forward modeling results of exact reflection coefficient equation and differential approximation reflection coefficient formula. (a) Reflection coefficient when $\theta = 8^\circ$; (b) Reflection coefficient when $\theta = 16^\circ$; (c) Reflection coefficient when $\theta = 24^\circ$; (d) Seismic records based on the accurate reflection coefficient equation; (e) Seismic records based on the linear approximation equation; (f) The difference between two seismic records

间残差很小，量级在 10^{-4} 至 10^{-8} 之间，可以忽略不计，因此采用微分近似方程对弹性阻抗进行反演能够得到较为准确的结果。

贝叶斯理论最初由英国数学家贝叶斯提出，用于解决逆向概率问题，即从已知结果推测造成该结果的原因，其基本原理可以表示为：

$$p(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{d}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})}{p(\mathbf{d})} \propto p(\mathbf{d}|\mathbf{m})p(\mathbf{m}) \quad (12)$$

其中， $p(\mathbf{m})$ 为弹性阻抗的先验概率，与观测数据 \mathbf{d} 无关； $p(\mathbf{d}|\mathbf{m})$ 为观测数据与弹性阻抗间的似然函数，表示已知 \mathbf{m} 后 \mathbf{d} 的条件概率； $p(\mathbf{d})$ 为边缘概率密度，在弹性阻抗反演问题当中可以视为常数； $p(\mathbf{m}|\mathbf{d})$ 为弹性阻抗的后验分布，表示已知观测数据 \mathbf{d} 时， \mathbf{m} 的条件概率。

假设公式(7)中的噪音项服从非零高斯分布，那么弹性阻抗反演当中的似然函数以矩阵形式可以表示为^[18]：

$$p(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \frac{1}{\sqrt{[(2\pi)^{N_d} |C_e|]}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{Gm})^T C_e^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{Gm})\right) \quad (13)$$

其中， C_e 为噪音协方差矩阵， N_d 为观测得到的地震数据的长度， $\mathbf{G} = 0.5 \cdot \mathbf{W}\mathbf{D}$ ，其中 \mathbf{W} 为子波褶积矩

阵， $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 为一阶差分矩阵。

Theune等(2010)曾经指出^[35]，基于贝叶斯理论的块反演由于引入了具有长尾特征的块约束项以及包含先验低频趋势的背景约束项，增强了反演结果的垂向梯度稀疏性，能够较好解决薄层问题，明确边界特征，提高反演结果的分辨率。

如图3所示，其代表了一种理想的两层介质模型的反演问题。点状虚线代表增加了块约束后的反演结果，线状虚线代表采用传统方法(图中为初始模型低频约束)获得的反演结果，可以看出块约束在边界处能够更好的收敛，其结果对边界的刻画能力更强，分辨率得到有效提高。因此为了解决反演过程中存在的垂向分辨率不足问题，基于贝叶斯框架加入包含低频约束以及块约束在内的先验约束，分别为^[35]：

$$p_G(\mathbf{m}) = \frac{1}{\sqrt{[(2\pi)^N |C_m|]}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})^T C_m^{-1}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (14)$$

$$p_B(\mathbf{m}) = \lambda \exp\left(-\sum_{i=1}^N \sum_j^{N_m} B\left(\frac{[\mathbf{L}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})]_{ij}}{\kappa_j^2}\right)\right) \quad (15)$$

其中，式(14)是包含低频约束以及参数协方差的高斯分布项，式(15)是具有长尾分布特征的块约束项。 C_m 为待反演参数的协方差矩阵， N 为待反演参数的向量长度， N_m 为待反演参数的个数， $\boldsymbol{\mu}$ 为待反演参数的均值向量， λ 为超参数， κ_j 表示待反演参数的尺度因子， $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 为一阶偏微分算子。

在贝叶斯框架下进行弹性阻抗反演，即求解观测数据为 \mathbf{d} 情况下 \mathbf{m} 的最大后验概率，对目标函数 $J(\mathbf{m})$ 求解最小值，可以得到观测到 \mathbf{d} 时发生概率最大的 \mathbf{m} 。在贝叶斯框架下，弹性阻抗反演的目标函数为：

$$\min_{\mathbf{m}} [J(\mathbf{m})] = \min_{\mathbf{m}} \{J_e(\mathbf{d}|\mathbf{m}) + \alpha [J_G(\mathbf{m}) + J_B(\mathbf{m})]\} \quad (16)$$

$$J_e(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{Gm})^T C_e^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{Gm}) \quad (17)$$

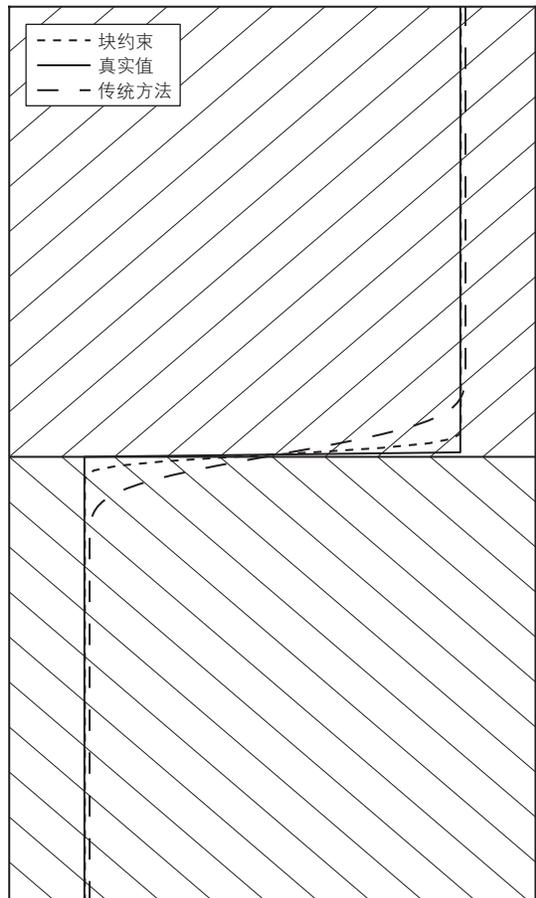


图3 块状反演效果示意图
Fig. 3 Sketch of the blocky inversion results

$$J_G(\mathbf{m}) = \frac{1}{2}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}_m^{-1}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu}) \quad (18)$$

$$J_B(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^N \sum_j^N B\left(\frac{[\mathbf{L}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})]_{ij}}{\kappa_j^2}\right) \quad (19)$$

目标函数 $J(\mathbf{m})$ 对 \mathbf{m} 求导等于零, 求解后即可得到想要求得的弹性阻抗值。

1.2 微分超拉普拉斯块约束

在弹性阻抗的反演过程当中, 存在纵向分辨率不足, 边界刻画不清晰等问题, 而块约束正则化项 $B(x)$ 的引入恰好能够有效解决问题。为了提高待反演参数的分辨率, 选取稀疏性更强、求解更稳定快速的分布成为关键。

超拉普拉斯分布 $B(x) \propto |x|^p$, $1 > p > 0$, 与 L_p 范数类似, 可以通过改变不同 p 值来改变分布的数学特征从而得到较为稀疏的结果, 被广泛应用于图像处理以及信号分析当中^[38-41]。然而他们对最大后验概率的求取是困难的, 因为对于参数 x 的求导在0点没有定义^[38], 为了解决这一问题, 将微分超拉普拉斯分布引入, 使得其在任何位置都能够求导, 即二次可微:

$$B(x) = |x^2 + ee^2|^{\frac{p}{2}} \quad (20)$$

其中, ee 为阈值, 其量级远小于 x 参数, 根据式(20)也可以看出, 微分超拉普拉斯与 L_p 范数类似, 为了降低阈值对反演结果的影响, 可以将 ee 的值设为 10^{-4} 。而 p 的值与待反演参数的自身性质有关, 结合观测资料, 可以选取最佳数值大小, 从而在保障反演精确度的同时兼顾分辨率最大程度的提升。

基于上文的论述, 将微分超拉普拉斯分布与块约束相结合得到的正则化项为:

$$B\left[\frac{\mathbf{L}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})}{\kappa^2}\right] = \left[\left[\frac{\mathbf{L}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})}{\kappa^2}\right]^2 + ee^2\right]^{\frac{p}{2}} \approx w[\mathbf{L}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})]^2 \quad (21)$$

其中, $p(p > 0)$ 的值可以由弹性阻抗的分布特征决定。事实上, 当 p 值较小时(即 $1 > p > 0$)微分超拉普拉斯约束项具有相对较强的稀疏性, 但是当 $0 < p < 1$ 时, 其呈现非凸性, 为目标函数最小化造成困难。

为了使反演结果更加精确, 并且提高计算效率, 可以在反演过程当中, 用一系列 L_2 正则化项的形式改写微分超拉普拉斯项, 即, 将

$$w = \frac{1}{\kappa^4} \left\{ \left[\frac{\mathbf{L}(\mathbf{m}^{(k)} - \boldsymbol{\mu})}{\kappa^2} \right]^2 + ee^2 \right\}^{\frac{p}{2}-1}$$

项视为权重系数向量,

不参与最小化过程的求导从而简化了复杂的计算过程。随后选取重加权迭代法进行反演, 以获得稳定准确的结果, 对目标函数求导并使其结果为0, 可以得到弹性阻抗的迭代更新式:

$$\mathbf{m}^{n+1} = \left[\mathbf{G}^T \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{G} + \beta (\mathbf{C}_m^{-1} + \mathbf{L}^T \mathbf{Q} \mathbf{L}) \right]^{-1} \left[\mathbf{G}^T \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{d} + \beta (\mathbf{C}_m^{-1} + \mathbf{L}^T \mathbf{Q} \mathbf{L}) \mathbf{m}^n \right] \quad (22)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Q} = \frac{p}{\kappa^4} \left\{ \left[\frac{\mathbf{D}(\mathbf{m} - \boldsymbol{\mu})}{\kappa^2} \right]^2 + ee^2 \right\}^{\frac{p}{2}-1}$$

微分超拉普拉斯约束中 p 值与反演结果垂向梯度有关, 因此可以通过测试选取最合适的值, 并将其应用于工区。

从图4中可以看出, 当 p 值处于0~1的范围当中时, 其曲线与 $p=0$ 时更为相近, 而当 $p=0$ 时, 该分布表示参数中非零元素的个数, 其在数学表达上与 L_0 相似度更高, 因此该约束具有更高的稀疏性。同时, 当 p 处于0~1范围内时仍然可以选择不同的 p 值使约束的性质更加适用于工区。综上所述, 在 p 值的选择当中, 为了获得更强的稀疏性, 我们更倾向于将 p 值确定在0~1的范围内。

图5为三维情况下, 不同 p 值的微分超拉普拉斯约束的度量以及零范数的度量, 其中图5a为 L_0 范数的三维度量, 由图可知其具有良好的稀疏性, 但由于参数当中非零元素个数在求导过程当中难以实现, 因此我们选取不同约束, 以求其在形态上能够愈发接近 L_0 范数。而通过图5b、5c、5d可以看出, 当 $p=0.3$ 时, 微分超拉普拉斯分布在形态上最为接近 L_0 范数, 也证明了 p 值在0~1时能够更好的表示稀疏性^[42]。

2 模型测试

为了验证所提出方法在提升分辨率、准确度以及稳定性方面的效果, 选取单道模型以及二维Marmousi模型进行测试, 分别对比在 L_1 范数、 L_2 范数以及微分超拉普拉斯块约束下反演得到的弹性阻抗结果。同时, 为了验证所提出方法的鲁棒性以及应用于实际资料时的适用性, 将对正演得到的地震记录按照如下定义的信噪比公式添加噪音, 并对添加噪音后的反演结果进行讨论:

$$SNR = 10 \cdot \lg \frac{\|d^*\|_2^2}{\|d - d^*\|_2^2} \quad (23)$$

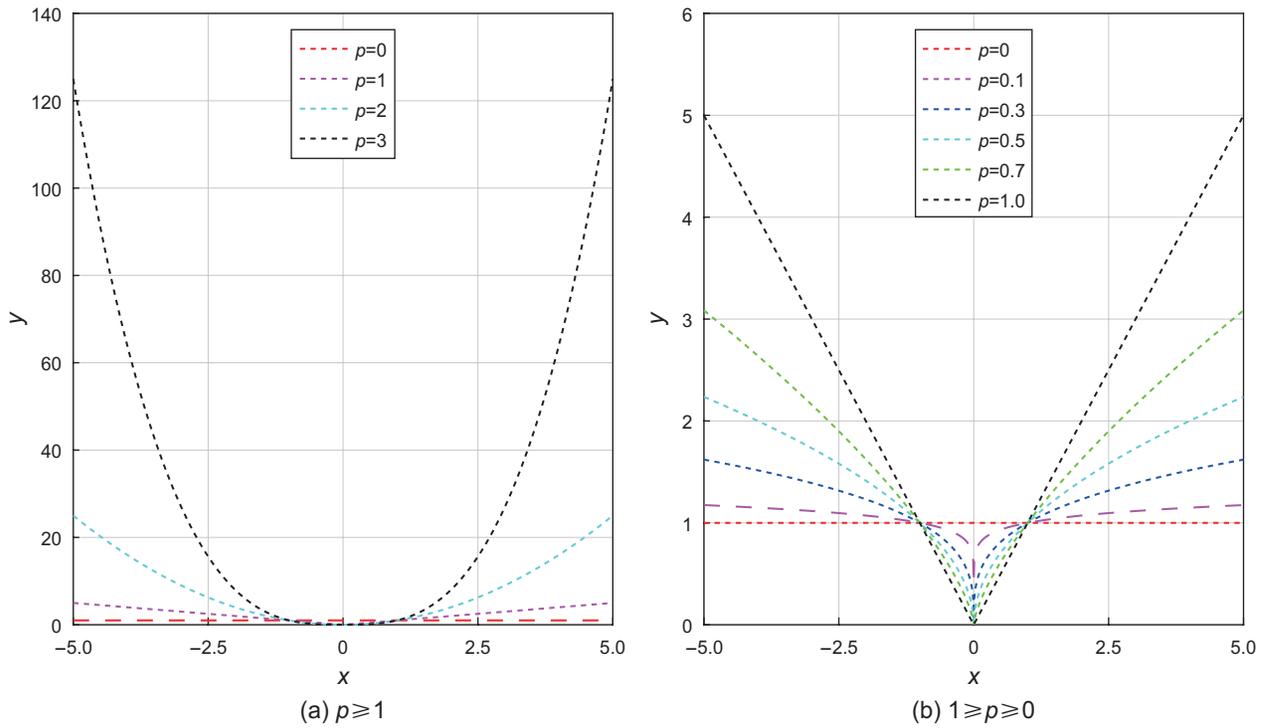


图 4 不同 ρ 值下二维微分超拉普拉斯约束的度量

Fig. 4 The measurement of 2D differentiable hyper-Laplacian constraint under different ρ values

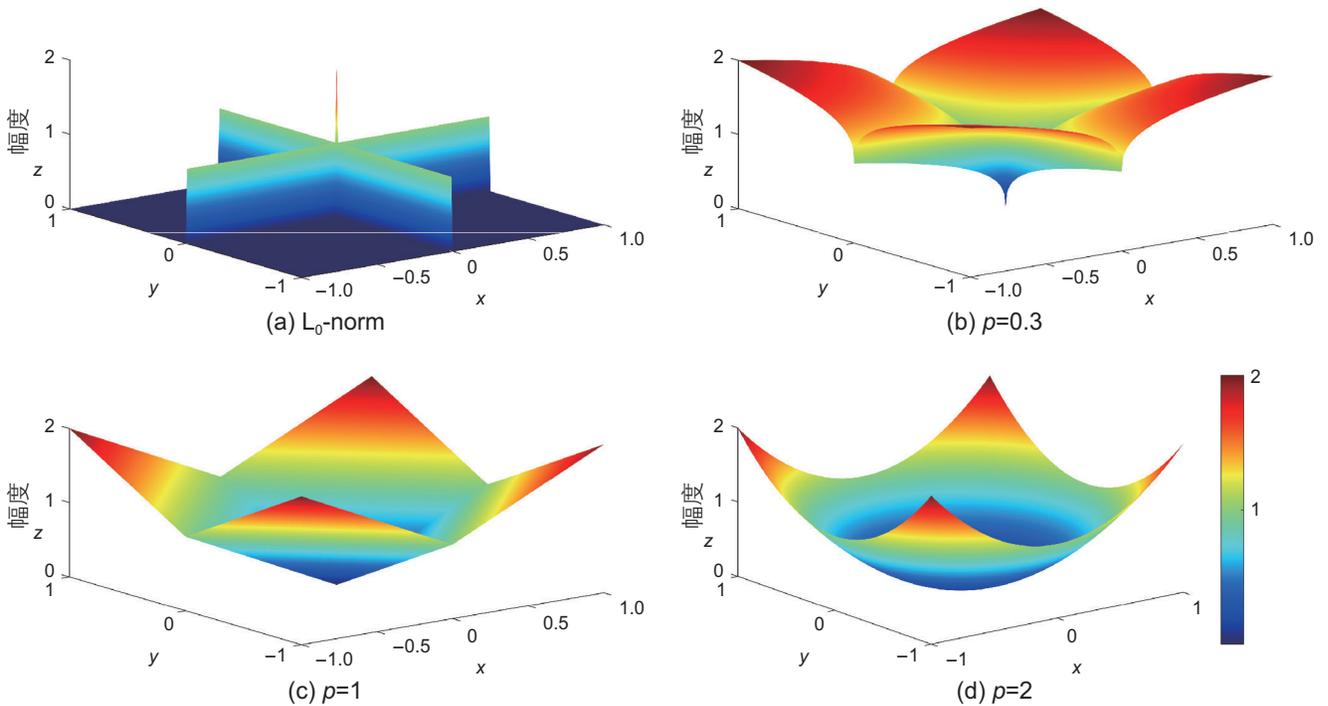


图 5 不同 ρ 值下三维微分超拉普拉斯分布图

Fig. 5 The diagrams of 3D differentiable hyper-Laplacian distribution under different ρ values

其中, d^* 为无噪声情况下的地震记录, 而 d 为含噪地震记录。

利用公式(6)得到单道模型的反射系数, 随后与主频为 30Hz 的雷克子波采用公式(7)进行褶积从而得到

单道地震记录如图 6a 所示。根据公式(23)对记录分别添加噪音使得地震记录信噪比分别为 10 dB 和 2 dB, 如图 6b、6c 所示。图 7 为分别利用 L_1 范数、 L_2 范数以及微分超拉普拉斯约束进行反演得到的结果, 其

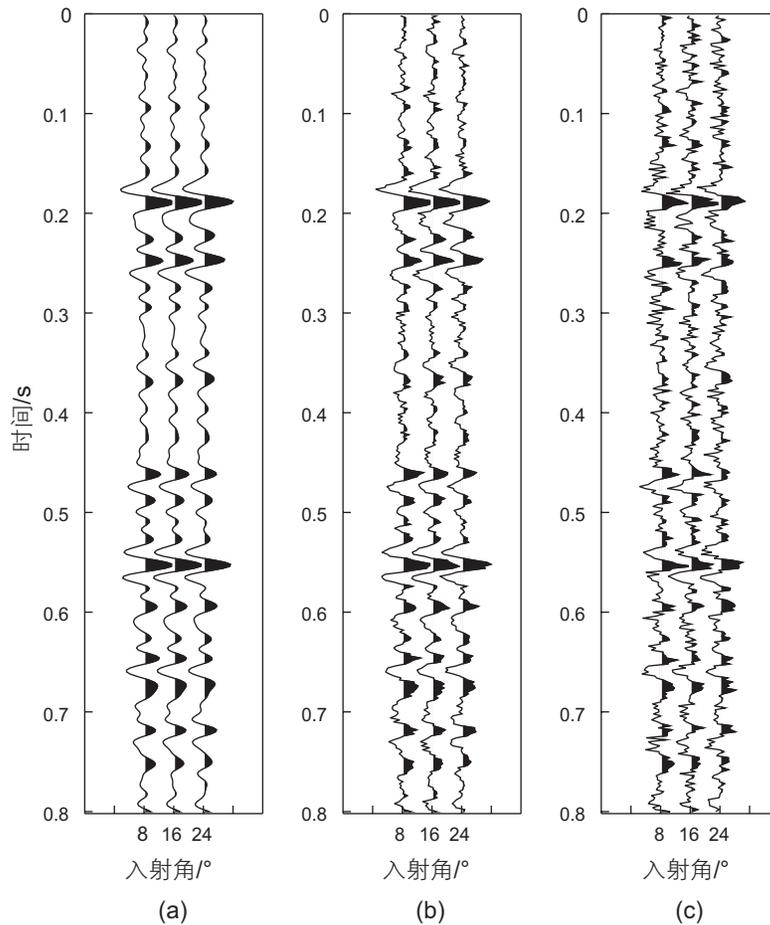


图6 不同入射角下的单道合成地震记录

Fig. 6 Single-trace synthetic seismic records at different incident angles

中图 7a、d 以及 g 为入射角等于 8° 、 16° 以及 24° 下微分超拉普拉斯块约束反演得到的结果；图 7b、e 以及 h 为入射角等于 8° 、 16° 以及 24° 下 L_2 范数约束反演得到的结果；图 7c、f 以及 i 为入射角等于 8° 、 16° 以及 24° 下 L_1 范数约束反演得到的结果。

观察反演结果可以发现，本文提出的方法能够有效提高反演结果的分辨率以及准确性。图中 R 代表反演结果与真实值之间的相关系数，我们可以发现在微分超拉普拉斯块约束下，在红框范围内，反演结果的准确性得到了明显的提高。同时我们也可以发现，在连续变化的曲线部分 L_2 范数约束分辨率较高，而 L_1 范数约束对于变化的边界具有较为明显的刻画，但其分辨率较 L_2 范数约束相比有所降低，一些细微的抖动被忽略从而换取了稀疏变化的精细刻画。而微分超拉普拉斯块约束通过选取合适的 p 值，在保有 L_2 范数对细微抖动的刻画能力下的同时保持了一定的稀疏性，能够相较于 L_2 范数对边界进行精准刻画，这也从理论上证明了该方法的可行性以及有效性。

通过单道数据测试，我们对比了不同约束下反演

结果的特征，证明了微分超拉普拉斯块约束的结果既能有效刻画边界，也能够突出细微变化，有效提高了反演结果的准确性和边界刻画能力。为了进一步验证其有效性，选取二维 Marmousi 模型进行测试。图 8a 至 c 为不同入射角下的合成地震记录，其信噪比为 10dB，图 8d 至 f 为入射角等于 8° 、 16° 以及 24° 下的弹性阻抗真实值剖面。

图 9a、d 以及 g 为入射角等于 8° 、 16° 以及 24° 微分超拉普拉斯块约束反演得到的弹性阻抗剖面；图 9b、e 以及 h 为入射角等于 8° 、 16° 以及 24° L_2 范数约束反演得到的弹性阻抗剖面；图 9c、f 以及 i 为入射角等于 8° 、 16° 以及 24° L_1 范数约束反演得到的弹性阻抗剖面。

通过观察可以发现，二维 Marmousi 模型的测试进一步印证了单道反演测试中得出的结论，即 L_1 范数约束能够清晰的刻画边界，但存在横向不连续，纵向分辨率不够高的问题； L_2 范数约束较 L_1 范数约束分辨率有所提升但对于边界的刻画却不够清晰。而本文提出的方法能够通过调节 p 值使其适应数据本身的统计

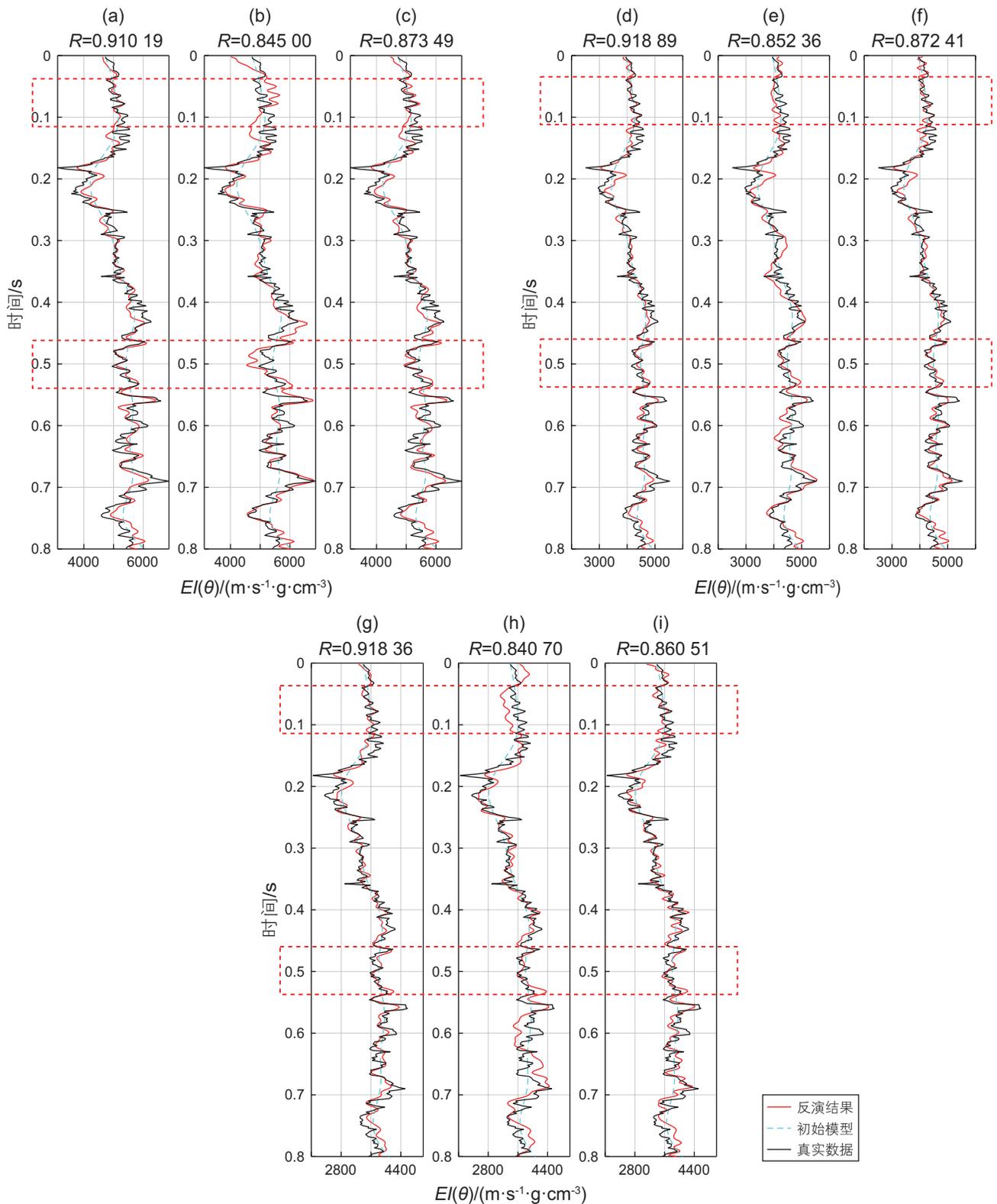


图 7 不同约束下信噪比为 2 的地震数据的反演结果。(a)~(i) 为选用不同约束项的不同入射角下的反演结果

Fig. 7 Inversion results of seismic data with SNR=2 under different constraints. (a) to (i) are the inversion results under different incident angles with different constraint

学特征，因此在兼顾纵向分辨率的同时，能够有效提高对于边界的刻画的准确性，其效果更好，因此二维

Marmousi模型的测试也进一步证明了本文所提出方法的有效性和可行性。

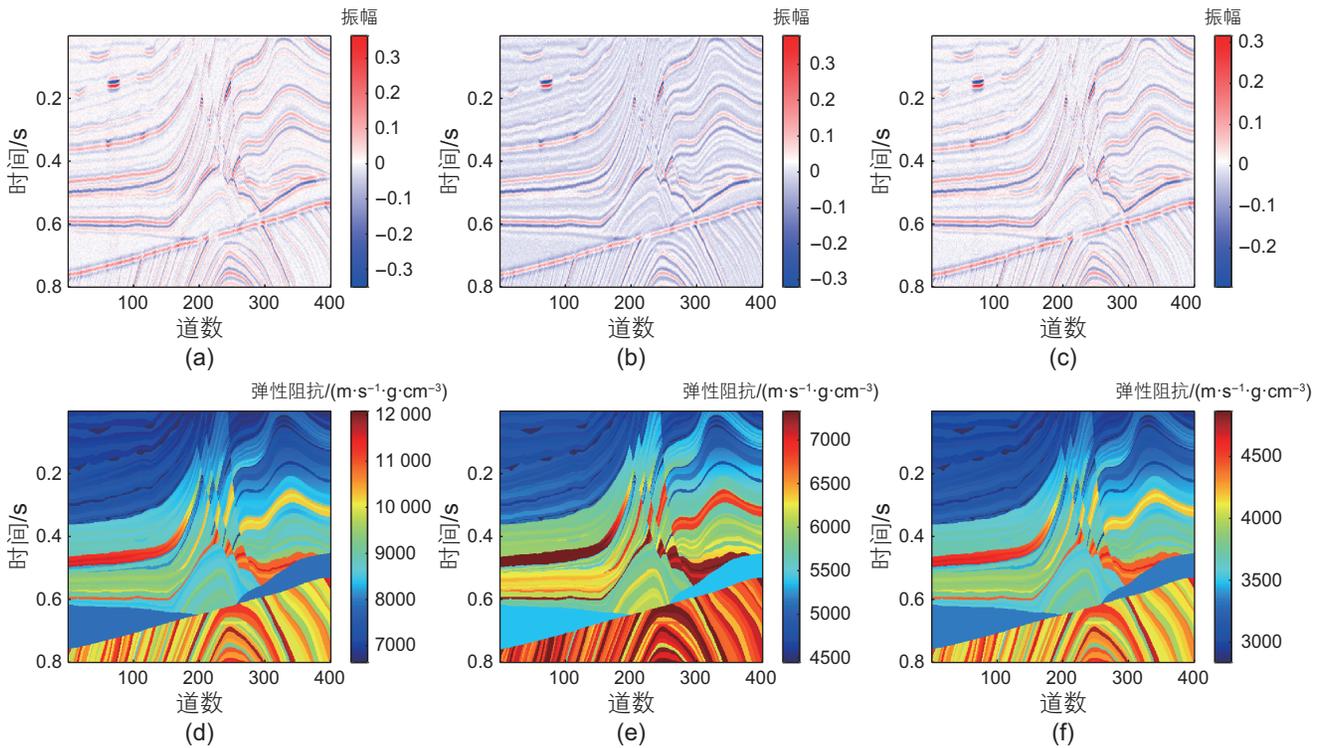


图8 不同入射角下弹性阻抗真实值以及相应的合成地震记录。(a)~(c)为不同入射角下的合成地震记录；(d)~(f)为不同入射角下的弹性阻抗真实值

Fig. 8 The true values of elastic impedance under different incidence angles and the corresponding synthetic seismic records. (a) to (c) are the synthetic seismic data under different incident angles; (d) to (f) are the true values of elastic impedance under different incident angles

3 实际资料测试

通过模型测试，证明了所提出方法在理论上存在一定优点后，为了证明其能够应用于实际数据，且在实际数据的反演过程当中能够同样有效可行，选取某工区部分角度叠加剖面进行反演，并对反演结果进行分析。

在进行实际反演之前，需要借助测井数据确定微分超拉普拉斯约束中的 p 值。首先，利用已知测井资料，对从中得到的弹性阻抗参数与一阶差分矩阵相乘，并对得到的结果计算概率密度分布；随后更改微分超拉普拉斯约束中的 p 值，使微分超拉普拉斯分布的概率密度函数与真实数据趋势相符合：

图10中蓝色直方图代表一阶微分真实井数据的概率密度分布，不同颜色的实曲线代表不同 p 值下微分超拉普拉斯分布的概率密度函数。观察图10可以发现，当 p 值取0.95时，概率密度函数能最大程度与概率密度分布相符合，其长尾特征也能包括大部分异常值，具有良好的稀疏性，由此实际数据处理中 p 值被确定。

图11a为入射角为 8° 时的部分角度叠加数据，图

11b为该剖面内基于统计学方法提取的地震子波，图11c为输出的初始弹性阻抗模型。分别对实际数据采用 L_1 范数约束、 L_2 范数约束以及微分超拉普拉斯约束下的反演，得到如图11d、e以及f所示的结果。通过反演结果，我们可以发现：基于 L_2 范数约束得到的反演结果横向连续性更好，反演的分辨率更高；基于 L_1 范数约束得到的反演结果对地层边界的刻画更为清晰，可以看到层次分明的地层变化，但其横向连续性以及分辨率更低；而微分超拉普拉斯约束在兼顾了清晰的边界刻画能力保证一定分辨率同时，横向连续性也较好，证明了方法的优势。

对于实际资料的测试结果，我们可以得到与理论模型测试相同的结论，即微分超拉普拉斯约束能够在有效提高分辨率的同时清晰的刻画地层边界，因为在反演过程中 p 值可以根据数据的统计学特征进行调整，从而能够兼顾稀疏性以及连续性，使反演的结果更加准确。

图12为不同约束下井旁道反演结果与测井数据的对比，通过对比我们也可以看出，微分超拉普拉斯约束下的反演结果与真实值更加接近，效果更好，证明了方法的有效性以及实用性，表明方法能够用于实

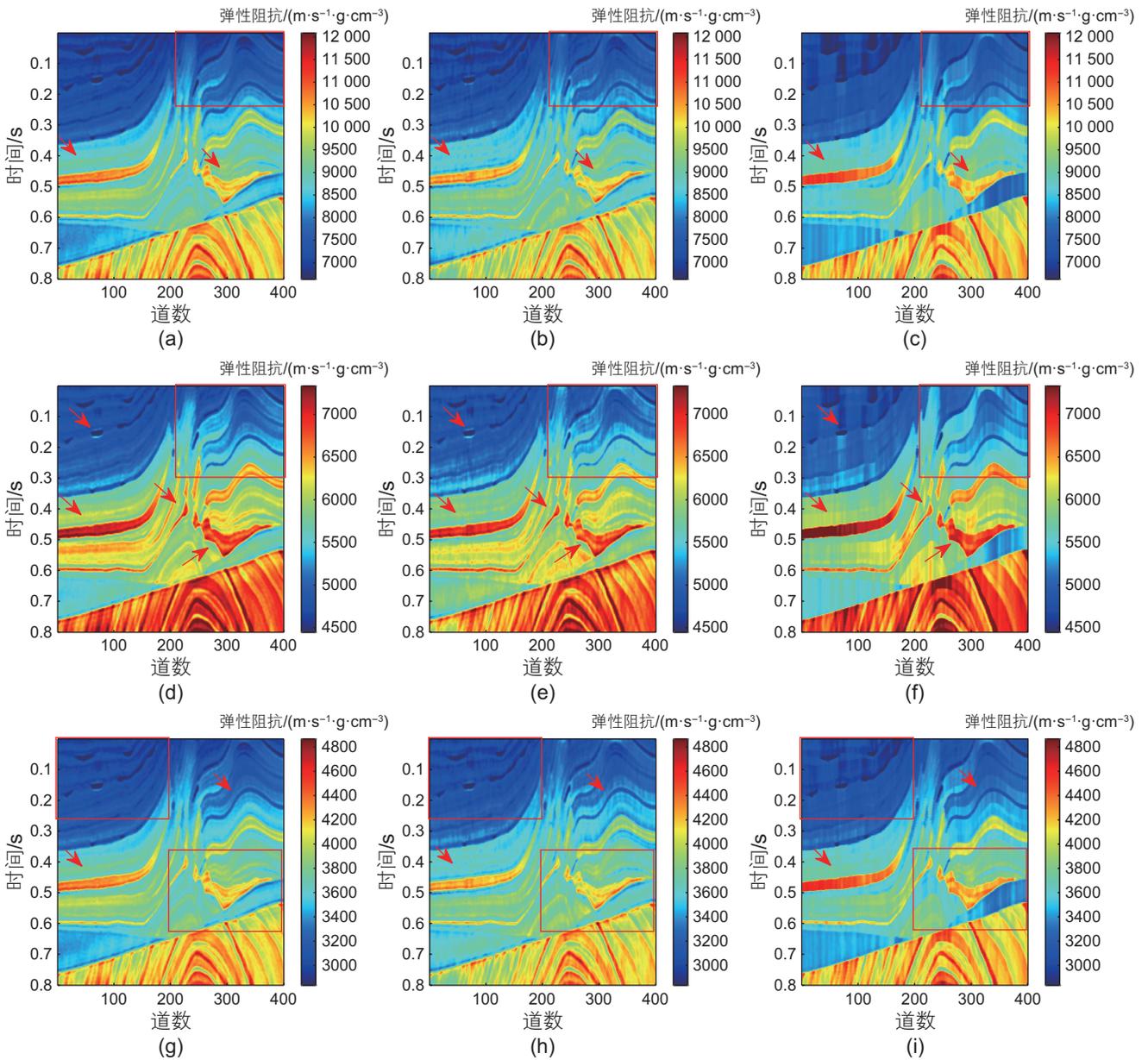


图 9 不同约束下的反演结果。(a)~(c) $\theta = 8^\circ$; (d)~(f) $\theta = 16^\circ$; (g)~(i) $\theta = 24^\circ$

Fig. 9 Inversion results under different constraints. (a) to (c) $\theta = 8^\circ$; (d) to (f) $\theta = 16^\circ$; (g) to (i) $\theta = 24^\circ$

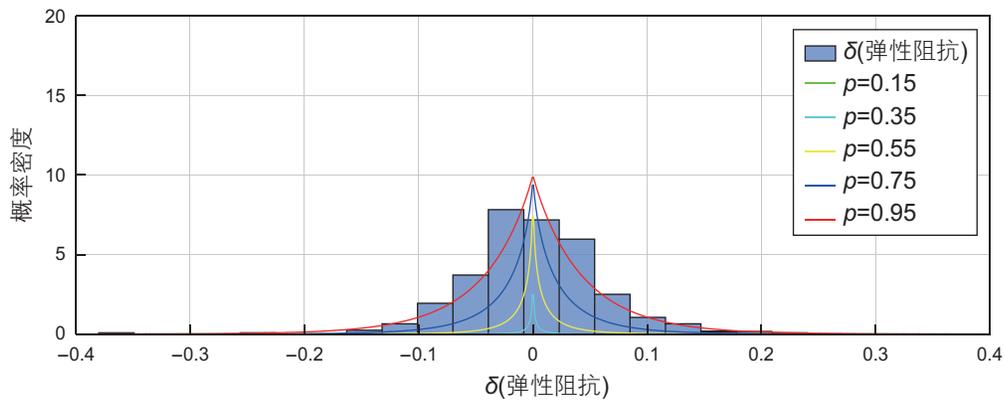


图 10 真实井数据弹性阻抗一阶微分概率密度分布

Fig. 10 Probability density distribution of first-order differential elastic impedance of the true well data

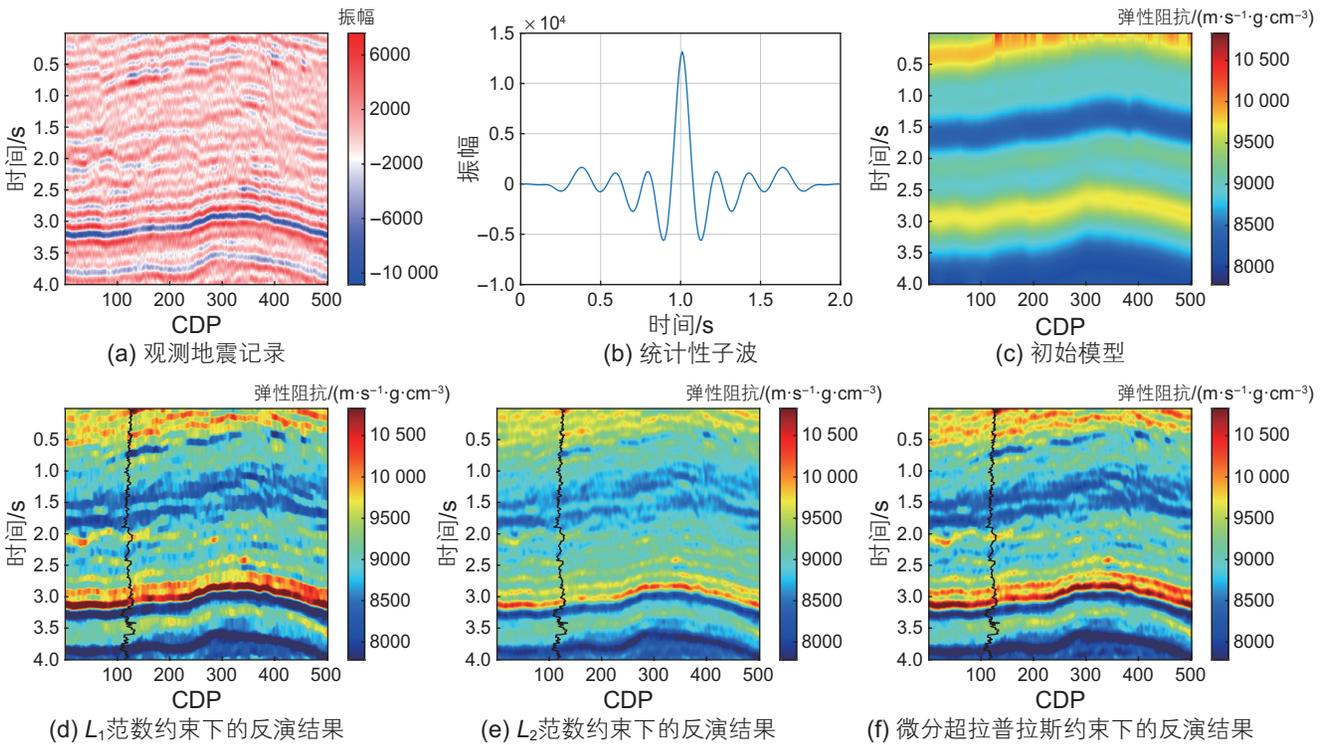


图 11 某工区实际资料弹性反演结果

Fig. 11 The inverted EI results of the real data

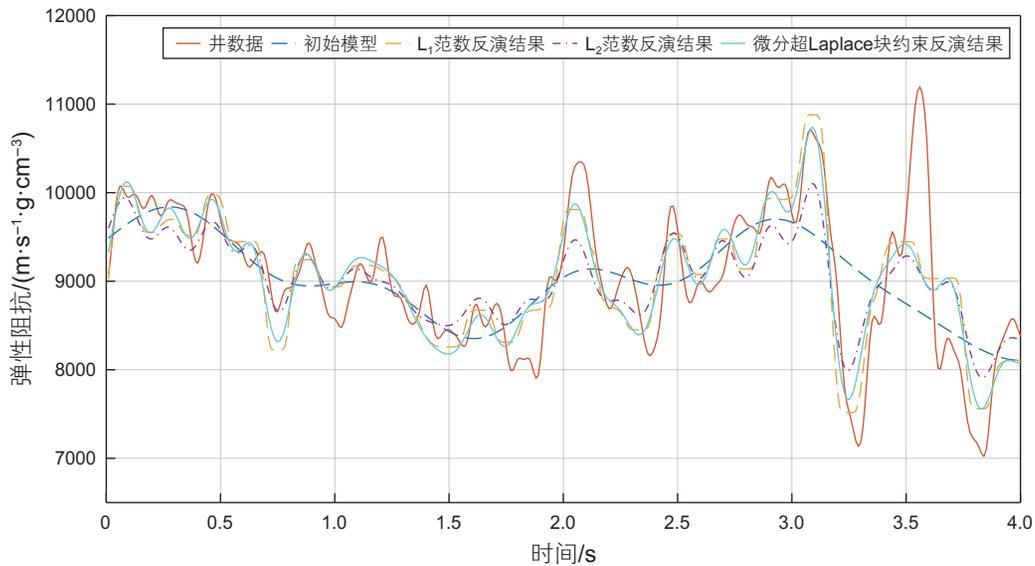


图 12 井旁道反演结果与实际测井资料对比

Fig. 12 The comparison between the actual log data and the inversion results of the uphole trace

际生产当中。

4 结论

为了解决弹性阻抗反演当中存在的解的非唯一性、分辨率不足和稀疏性较差等问题，本文在反演过程当中引入了形态上更加接近于稀疏的 0 范数且可以调节

公式中 p 值的微分超拉普拉斯块约束。首先，通过测试我们发现，当上下介质弹性阻抗比值处于 $0.5\sim 2.1$ 时近似式能够取得很高的精确度。随后，我们利用模拟的单道井数据进行反演测试，并对比反演得到的结果。我们发现，对于模拟数据来说，所提出方法综合了 L_1 范数约束的较强边界刻画能力以及 L_2 范数约束的高分辨率特点，在提高边界刻画能力的同时兼顾了高分辨

率。相关系数值同样定量地证明了这一判断。最后,为了证明该方法的实用性以及在实际应用当中的有效性,我们选取了某工区实际地震资料进行测试。实际资料结果表明微分超拉普拉斯块约束能够在实际应用当中清晰刻画边界的同时保证分辨率。井旁道反演结

果也证明了所提出方法具有一定优越性。综上所述,本文提出的方法具有一定的可行性以及实用性,能够有效提高弹性阻抗反演的分辨率以及边界刻画能力,为后续地质信息反演提供更加准确的输入数据。

参考文献

- [1] 张凌远, 张宏兵, 尚作萍, 等. 基于 Zoeppritz 方程的叠前和叠后混合多参数非线性地震反演[J]. 石油地球物理勘探, 2021, 56(1): 164–171. [ZHANG L Y, ZHANG H B, SHANG Z P, et al. Nonlinear multi-parameter hybrid inversion of pre-stack and post-stack seismic data based on Zoeppritz equation[J]. Oil Geophysical Prospecting, 2021, 56(1): 164–171.]
- [2] 王国权, 陈双全, 王恩利, 等. 粒子群优化的等效基质模量提取和横波预测方法[J]. 石油科学通报, 2020, 5(03): 316–326. [WANG G Q, CHEN S Q, WANG E L, et al. Equivalent matrix modulus extraction and S-wave prediction based on particle swarm optimization[J]. Petroleum Science Bulletin, 2020, 5(03): 316–326.]
- [3] 刘军, 刘道理, 邹雅铭, 等. 窄方位拖缆地震数据角度域成像处理及各向异性特征研究[J]. 石油科学通报, 2023, 8(06): 738–754. [LIU J, LIU D L, ZOU Y M, et al. Angle domain imaging processing and anisotropic characteristics of narrow azimuth streamer seismic data[J]. Petroleum Science Bulletin, 2023, 8(06): 738–754.]
- [4] 李志晔, 刘铮, 张卫卫, 等. 频变泊松阻抗在深水重力流砂体含气性预测中的应用[J]. 石油科学通报, 2023, 8(06): 755–766. [LI Z Y, LIU Z, ZHANG W W, et al. Application of frequency-dependent Poisson's impedance in prediction of gas potential of a deepwater gravity flow sandbody[J]. Petroleum Science Bulletin, 2023, 8(06): 755–766.]
- [5] CHEN H Z, CHEN T S, INNANEN K A. Estimating tilted fracture weaknesses from azimuthal differences in seismic amplitude data[J]. Geophysics, 2020, 85(3): 1–58.
- [6] PAN X P, LI L, ZHOU S X, et al. Azimuthal amplitude variation with offset parameterization and inversion for fracture weaknesses in tilted transversely isotropic media[J]. Geophysics, 2020, 86(3): 1–71.
- [7] CHEN H Z, LI J X, INNANEN K A. Nonlinear inversion of seismic amplitude variation with offset for an effective stress parameter[J]. Geophysics, 2020, 85(4): 1–74.
- [8] 马妮, 印兴耀, 孙成禹, 等. 基于方位地震数据的地应力反演方法[J]. 地球物理学报, 2018, 61(2): 10. [MA N, YIN X Y, SUN C Y, et al. Inversion for crustal stress based on azimuthal seismic data[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2018, 61(2): 10.]
- [9] 贾品, 封皓然, 王苏冉, 等. 基于MCMC的页岩气藏压裂缝网不确定性反演法[J]. 石油科学通报, 2023, 8(05): 637–648. [JIA P, FENG H R, WANG S R, et al. Uncertainty inversion method of fracture network in shale gas reservoir based on MCMC[J]. Petroleum Science Bulletin, 2023, 8(05): 637–648.]
- [10] 胡鑫, 王国权, 刘俊洲, 等. 基于 Zoeppritz 方程的纵横波联合反演方法及应用[J]. 石油科学通报, 2022, 7(04): 515–531. [HU X, WANG G Q, LIU J Z, et al. The joint PP- and PS-wave inversion method based on the Zoeppritz equations and its application. Petroleum Science Bulletin, 2022, 7(04): 515–531.]
- [11] 韩旭, 王尚旭, 刘浩杰, 等. 基于孔隙纵横比谱反演的饱和岩石宽频段岩石物理模型[J]. 石油科学通报, 2022, 7(03): 334–342. [HAN X, WANG S X, LIU H J, et al. Multi-frequency band rock physics model for saturated rock based on pore aspect ratio spectral inversion[J]. Petroleum Science Bulletin, 2022, 7(03): 334–342.]
- [12] CONNOLLY P. Elastic impedance[J]. Leading Edge, 1999, 18(4): 438–438.
- [13] MARTINS J L. An approach for elastic impedance in weakly anisotropic media[J]. Seg Technical Program Expanded Abstracts, 2002, 21(1): 2478.
- [14] SANTOS L T, TYGEL M. Impedance-type approximations of the P-P elastic reflection coefficient: Modeling and AVO inversion[J]. Geophysics, 2004, 69(2): 592–598.
- [15] 陈天胜, 魏修成, 刘洋. 一种新的各向异性弹性阻抗近似公式[J]. 石油物探, 2006, 45(6): 563–569. [CHEN T S, WEI X C, LIU Y. New approximation formula for calculation of elastic impedance in anisotropic media[J]. Geophysical Prospecting for Petroleum, 2006, 45(6): 563–569.]
- [16] 宗兆云, 印兴耀, 张峰, 等. 杨氏模量和泊松比反射系数近似方程及叠前地震反演[J]. 地球物理学报, 2012, 55(11): 3786–3794. [ZONG Z Y, YIN X Y, ZHANG F, et al. Reflection coefficient equation and pre-stack inversion with Young's modulus and Poisson ratio[J]. Chinese Journal of Geophysics— Chinese Edition, 2012, 55(11): 3786–3794.]
- [17] CHEN H Z, INNANEN K A, CHEN T S. Estimating P- and S-wave inverse quality factors from observed seismic data using an attenuative elastic impedance[J]. Geophysics, 2018, 83(2): 173–187.

- [18] LINDSETH R O. Synthetic sonic logs: A process for stratigraphic interpretation[J]. *Geophysics*, 1979, 44(1): 3–26.
- [19] LI S, PENG Z P. Seismic acoustic impedance inversion with multi-parameter regularization[J]. *Journal of Geophysics and Engineering*, 2017, 14(3): 520–532.
- [20] 冉喜阳, 周怀来, 张益明, 等. 一种基于稀疏窗S变换的分频—重构波阻抗反演方法[J]. *中国海上油气*, 2019, 31(4): 75–84. [RAN X Y, ZHOU H L, ZHANG Y M, et al. A frequency division-reconstruction wave impedance inversion method based on sparse window S transform[J]. *China Offshore Oil and Gas*, 2019, 31(4): 75–84.]
- [21] WANG L Q, ZHOU H, WANG Y F, et al. Three-parameter prestack seismic inversion based on L_{1-2} minimization[J]. *Geophysics*, 2019, 84(5): R753–R766.
- [22] 耿伟恒, 陈小宏, 李景叶, 等. 基于 L_{1-2} 正则化的地震波阻抗“块”反演[J]. *石油地球物理勘探*, 2022, 57(6): 1409–1417. [GENG W H, CHEN X H, LI J Y, et al. Seismic “blocky” acoustic impedance inversion based on L_{1-2} regularization[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2022, 57(6): 1409–1417.]
- [23] ZHANG R, CASTAGNA J. Seismic sparse-layer reflectivity inversion using basis pursuit decomposition[J]. *Geophysics*, 2011, 76(6): R147–R158.
- [24] 刘国昌, 蔡加铭, 闫海洋, 等. 利用稀疏约束非平稳多项式回归去除地震噪声及拾取初至[J]. *石油地球物理勘探*, 2020, 55(3): 548–556. [LIU G C, CAI J M, YAN H Y, et al. Using sparse-constrained nonstationary polynomial regression to remove seismic noises and picking up first arrival[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2020, 55(3): 548–556.]
- [25] 程三, 张志勇, 周峰, 等. 非结构化网格渐进自适应正则化反演算法[J]. *石油地球物理勘探*, 2022, 57(2): 467–477. [CHENG S, ZHANG Z Y, ZHOU F, et al. Study on step-by-step regularization inversion based on adaptive unstructured mesh[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 2022, 57(2): 467–477.]
- [26] 邹振桓, 杨文采. 地震道的广义线性反演[J]. *石油地球物理勘探*, 1987, 22(4): 363–375. [ZOU Z H, YANG W C. Generalized linear inversion of seismic traces[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 1987, 22(4): 363–375.]
- [27] CLAERBOUT J F, MUIR F. Robust modeling with erratic data[J]. *Geophysics*, 1973, 38(5): 826–844.
- [28] TIKHONOV A N, GONCHARSKY A V, STEPANOV V V, et al. Numerical methods for the solution of ill-posed problems[M]. Netherlands: Springer, 1995.
- [29] BULAND A, OMRE H. Bayesian linearized AVO inversion[J]. *Geophysics*, 2003, 68(1): 185–198.
- [30] ELAD M. Sparse and redundant representations[M]. New York: Springer, 2010.
- [31] ZHANG F C, DAI R H, LIU H Q. Seismic inversion based on L_1 -norm misfit function and total variation regularization[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 2014, 109(10): 111–118.
- [32] JAFARPOUR B, GOYAL V K, MCLAUGHLIN D B, et al. Transform-domain sparsity regularization for inverse problems in geosciences[J]. *Geophysics*, 2009, 74(5): R69–R83.
- [33] KESHAVARZIAN R, AGHAGOLZADEH A, REZAI T Y. LL_p norm regularization based group sparse representation for image compressed sensing recovery[J]. *Signal Process-Image Communication*, 2019, 78:477–493.
- [34] KRISHNAN D, FERGUS R. Fast image deconvolution using hyper-Laplacian priors[C]. 23rd Annual Conference on Neural Information Processing Systems, Vancouver, 2009, 1033–1041.
- [35] THEUNE U, EIDSVIK J, JENSÅS I. Analysis of prior models for a blocky inversion of seismic AVA data[J]. *Geophysics*, 2010, 75(3): C25–C35.
- [36] ZHAO Z, WANG S, AN B, et al. Hierarchical hyper-Laplacian prior for weak fault feature enhancement[J]. *ISA Transactions*, 2019, 96: 0019–0578.
- [37] 姚建阳. 用地震道积分法提高地层的识别能力[J]. *石油物探*, 1990, 29(1): 40–49. [YAO J Y. Enhancement of the discernibility on formation by seismic trace integration[J]. *Geophysical Prospecting for Petroleum*, 1990, 29(1): 40–49.]
- [38] EIDSVIK J, THEUNE U. Blocky inversion of time-lapse seismic AVO data[C]. SEG 79th Annual International Meeting Expanded Abstracts, Houston, 2009, 3820–3824.
- [39] SUN J, LI Y. Adaptive L_p inversion for simultaneous recovery of both blocky and smooth features in a geophysical model[J]. *Geophysical Journal International*, 2014, 197(2): 882–899.
- [40] TANG W, LI J Y, ZHANG W B, et al. Time-lapse difference inversion based on the modified reflectivity method with differentiable hyper-Laplacian blocky constraint[J]. *Geophysics*, 2021, 86(6): R865–R878.
- [41] ZONG Z, JI L. Azimuthal Amplitude Difference AVAZ Inversion for Orthotropic Parameters[C]. 81st EAGE Conference and Exhibition, 2019.
- [42] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306.